数理解析研究所講究録
624巻 1987年 101-106

Diagramを定める link群のWirtinger表示

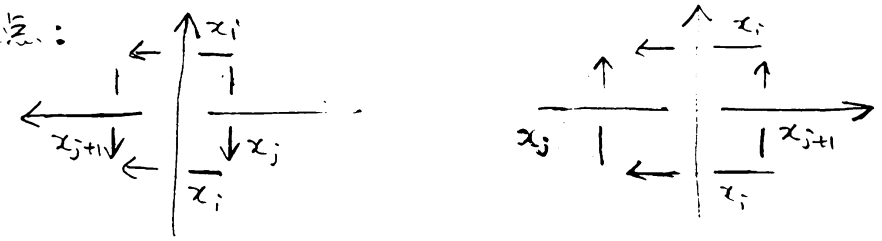
神大・自然科学 児玉宏児 (Kouzi Kodama)

定義

oriented link diagram の link群の Wirtinger 表示
(c.f. Rolfsen [2])

crossingを持たない trivial な component を除けば、diagram の n 個の crossing は under crossing の部分で link を n 個の arcs に分ける。link の components に順序をつけ、さらに link の向きに沿って arcs に順序をつける。各 arcs で meridian をとり（+方向に1回まわるように）、arcs の順序に対応させて番号をつける。これで $x_1, x_2, \dots, x_n$ を
$G(L)=\pi_1(S^3-N(L))$ の generator とする。
relation は各交点で次の様にとる

交点：



relation：

$$x_{j+1}=x_i^{-1}x_jx_i \qquad\qquad x_{j+1}=x_ix_jx_i^{-1}$$

この様にして link diagram から基本群の Wirtinger 表示への対応を考える。

以下では non-trivial, non-split oriented link の link diagram を考える。

Waldhausen の結果 [3] より

命題 $(S^3, L_1), (S^3, L_2)$ oriented links に対し
$\exists \varphi : G(L_1) \to G(L_2)$
meridian longitude system を保つ同型写像
$\Leftrightarrow (S^3, L_1) \cong (S^3, L_2)$

これから diagram については次が云える。
命題 oriented link diagrams D_1, D_2 が同じ Wirtinger 表示を持つならば $D_1 \cong D_2$ (oriented link type が同じ)
$\because$) meridians は群の表示の generator として出ている。
次の様にして diagram に対応する Wirtinger 表示から一意的に diagram の各 component の longitude を求めることができる
link の i 番目の component k_i に対して、群表示の生成元中の k_i の meridian を $x_1, x_2, \cdots, x_\ell$ とする。k_i の under crossing での relation をとる。

$$x_2 = x_{j_1}^{-\varepsilon_1} x_1 x_{j_1}^{\varepsilon_1}$$
$$x_3 = x_{j_2}^{-\varepsilon_2} x_2 x_{j_2}^{\varepsilon_2}$$

⋮

$$x_\ell = x_{j_{\ell-1}}^{-\varepsilon_{\ell-1}} x_{\ell-1} x_{j_{\ell-1}}^{\varepsilon_{\ell-1}}$$

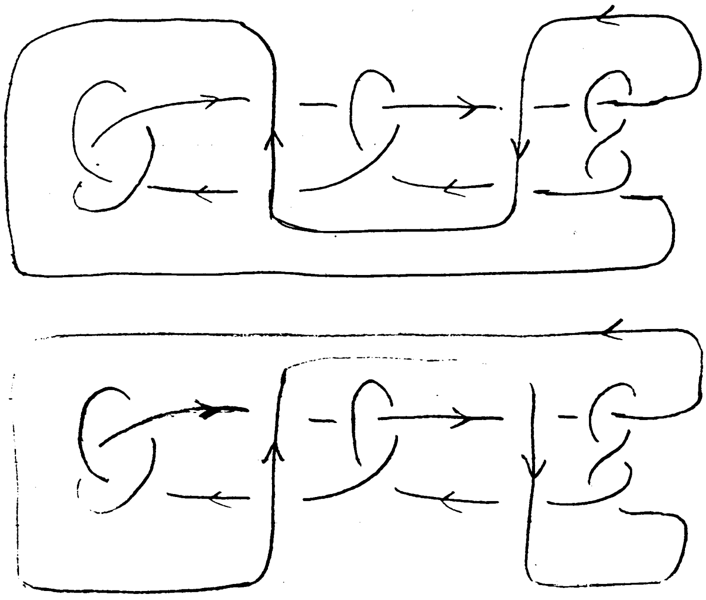
$$x_1 = x_\ell^{-\varepsilon_\ell} \; x_\ell \; x_\ell^{\varepsilon_\ell}$$

この時. k_i の longitude l_i は

$$l_i = x_{j_1}^{\varepsilon_1} x_{j_2}^{\varepsilon_2} \cdots x_{j_\ell}^{\varepsilon_\ell} \, x_1^{-\left(\sum_{s=1}^{\ell} \varepsilon_s\right)}$$

定義 S^2上の link diagram が S^2 の orientation preserving homeo で移り合う時. 同値とする

例. 同じ Wirtinger presentation を持つが同値ではない diagram



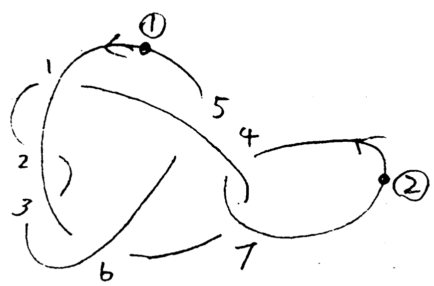
定義. Reidemeister の moves (R_1), (R_2), (R_3) による diagram の変形を diagram の isotopy.

(R_2), (R_3) による diagram の変形を regular isotopy とする

命題 (c.f. Kauffman [1])
2つの diagram D_1, D_2 が isotopic かつ component 各に writhe (交点の sign の和) が等しい。
$\Leftrightarrow$ D_1, D_2 は regular isotopic

link diagram の Wirtinger presentation の relation を見ることによって diagram の component 各の writhe が分かる。
命題. oriented link diagram D_1, D_2 が同じ Wirtinger presentation を持つ
$\Rightarrow$ D_1, D_2 は regular isotopic.

更に relator に順序をつける。
定義. 順序付き Wirtinger presentation
link の component に順序をつける。component の順に、component 上に適当に始点をとり orientation に従ってdiagram をたどり overcrossing で通る時に交点に番号をつけてゆく。これによって交点に対応する relation に番号をつける。
例



命題　oriented link diagrams D_1, D_2 が同じ順序付き Wirtinger presentation を持つ
$\Longrightarrow$ D_1, D_2 は同値な diagram.

$\because$) link の regular projection を S^2 上の 4-regular graph と見る。順序付きの Wirtinger presentation が与えられたとする。対応する link は μ-component link とする。link の各 component に対応させて μ 個の S^1 をとる。relation に従って S^1 上に crossing point の引きもどしをとる。undercrossing には generator の番号に対応して、overcrossing には generator の番号に対応して各々順序がつく。relation に word によって対応している undercross と overcross の引きもどしを同一視して 4-regular graph を得る。この graph の S^2 への embedding の頂点近傍での様子は relator によって定まっている。graph の maximal tree をとる。この tree の S^2 への embedding で relation で定まる頂点での様子を満足するものは一意的。この embedding に残りの辺を加えてゆくがその加え方は一意的。このgraphの embedding に上下を入れてやれば良い。

$$
\begin{array}{ccccc}
(G(L), \{m_i\}, \{l_i\}) & \leftarrow & \text{Wirtinger presentation} & \leftarrow & \text{順序付き Wirtinger presentation} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{isotopy type} & \leftarrow & \text{regular isotopy type} & \leftarrow & \text{diagram の同値}
\end{array}
$$

参考文献

[1] L. H. Kauffman : An invariant of regular isotopy, preprint

[2] D. Rolfsen : Knots and links, Publish or Perish Inc. Berkley, 1976.

[3] F. Waldhausen : On irreducible 3-manifold which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968) 56-88